

Contents of “Standard Calculus”

Calculus I (1st semester)

Chapter 1 実数と関数 (Real numbers and functions)

§ 1.1 数と式による表現

現象の数学的表現, 実数, 区間, 絶対値, 平方根, 方程式・不等式とその応用
(大学・クラスのレベルによっては Appendix A 1 を用いて追加復習してもよい)

§ 1.2 関数とグラフ

対応関係による関数の定義, 定義域・値域, 対称性, 平行移動, 多項式関数, 絶対値関数, 有理関数, 無理関数, 2次曲線等のグラフとその応用

§ 1.3 関数の演算

関数の和・差・積・商, 合成関数・逆関数(厳密に)とその応用

§ 1.4 指数関数と対数関数

べき関数の逆関数として累乗根の定義, 有理指数, 指数関数への拡張, その逆関数としての対数関数, 双曲線関数とその逆関数, 及びそれらの応用(大学・クラスのレベルによっては Appendix B を用いて追加復習してもよい)

§ 1.5 三角関数と逆三角関数

弧度法と三角関数の復習, \sec, \csc, \cot の導入, 逆三角関数の定義とその応用
(大学・クラスのレベルによっては Appendix C を用いて追加復習してもよい)

Chapter 2 極限と連続 (Limits and continuity)

§ 2.1 関数の極限

1次元運動の瞬間速度と関数の接線の考察から極限の概念を導入, 関数の極限の定義, $\varepsilon - \delta$ 式定義の考え方, 不定形の極限

§ 2.2 極限の性質

極限定理(関数の和・差・積・商・合成関数の極限: 詳しい証明は Appendix E), 有理関数・無理関数の極限, はさみうちの原理とその応用, 特に三角関数の極限, 片側極限, 無限遠での極限

§ 2.3 連続関数とその性質

連続関数の定義, 連続関数の演算, 逆関数の連続性, 中間値の定理, 最大値・最小値の定理, 一様連続性(詳しい証明は Appendix D)

Chapter 3 微分法の概念 (Concepts of differentiation)

§ 3.1 微分係数と導関数

微分係数の定義, 導関数, 基本的な関数の導関数, 運動への応用

§ 3.2 関数の演算と導関数

和・差・積・商・合成関数の導関数 (Chain Rule) (有理関数, 無理関数, 三角関数, 指数関数及びそれらの合成関数の導関数)

§ 3.3 逆関数の導関数

逆関数の導関数, 対数関数の導関数, 対数微分法, 逆三角関数, 逆双曲線関数の導関数

§ 3.4 高次導関数・陰関数の微分法

加速度と2次導関数, n 次導関数, 陰関数の導関数, 関係式によって定義された変化率 (相関変化率) とその応用

Chapter 4 微分法の応用 (Applications of differentiation)

§ 4.1 関数の極値と平均値の定理

関数の極値, 平均値の定理, 単調増加・減少, 極値の判定条件 (1次導関数テスト, 2次導関数テスト)

§ 4.2 グラフの凹凸と漸近線

グラフの凹凸, コーシーの平均値定理, ロピタルの定理, 漸近線, グラフの作図

§ 4.3 最大・最小問題への応用

いろいろな最大・最小問題への応用 (経済を含む), 最小2乗法

§ 4.4 近似式

線形近似, 微分(differential), 誤差, 関数の近似値, ニュートンの近似法

Chapter 5 積分法概念 (Concepts of integration)

§ 5.1 不定積分

微分: 位置→速度→加速度 の逆演算として不定積分の導入, 不定積分の性質, 微分公式から導かれる不定積分公式

§ 5.2 いろいろな関数の不定積分

$\int f(ax+b)dx$ の形の不定積分 (置換積分の考え方からの説明も可), 有理関数 (部分分数分解), 無理関数, 三角関数 (半角, 積・和の公式) 等の不定積分

§ 5.3 定積分

等加速度運動の移動距離の区分求積法による計算, リーマン和, 定積分の定義, 連続関数の可積分性, 微分積分学の基本定理

§ 5.4 定積分の性質

定積分の性質 (線形性, 方向性, 積分区間の加法性, 比較定理等), 積分の平均値定理, 面積への応用

Calculus II (2nd semester)

Chapter 6 いろいろな積分法 (Techniques of integration)

§ 6.1 置換積分

置換積分法, $\int \sin^m x \cos^n x dx$, $\int \tan^m x \sec^n x dx$, 三角置換法, $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ を含む積分

§ 6.2 部分積分

部分積分法, $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int \tan^n x dx$, $\int \sec^n x dx$ の漸化式等

§ 6.3 広義積分

非有界関数の広義積分, 無限区間の広義積分, ガンマ関数・ベータ関数, 数値積分 (台形公式, シンプソンの公式)

Chapter 7 積分法の応用 (Applications of integration)

§ 7.1 面積と体積

曲線によって囲まれた面積, 立体の体積 (Cross-section method, Shell method) の公式の区分求積法による導出と例

§ 7.2 曲線の長さと同転曲面の面積

曲線の長さ, 同転体の側面積の公式の区分求積法による導出と例

§ 7.3 仕事とエネルギー

力がする仕事, 位置エネルギー, 力学的エネルギー保存則, 液体を汲み出す仕事,

§ 7.4 モーメントと重心

質点系のモーメントと重心, 平面図形・同転体・曲線のモーメントと重心

Chapter 8 数列と級数 (Sequences and series)

§ 8.1 数列と級数

数列の収束・発散, Cauchy の収束定理, いろいろな数列の極限, 有界単調列の収束性, 級数の収束・発散, 等比級数, その他の級数,

§ 8.2 級数の収束判定

正項級数, 積分判定法, 比較判定法, ratio test, root test, 交代級数, 絶対収束

§ 8.3 べき級数とテイラー展開

べき級数, 収束半径, べき級数の項別微分・項別積分, テイラー展開, 多項式近似

§ 8.4 関数列*

関数列の収束 (各点収束, 一様収束), 一様収束と連続性, 極限と微分・積分の順序交換, フーリエ級数入門

Chapter 9 微分方程式入門 (Introduction to differential equations)

§ 9.1 変数分離形

変数分離形, 指数関数的増加・減少, 抵抗のある運動 (雨粒の運動等) への応用, 抑制と飽和 (ロジスティック方程式), 半減期, 同次形

§ 9.2 1 階線形微分方程式

積分因子・定数変化法による解法, 電気回路や溶液濃度等への応用

§ 9.3 2 階同次線形微分方程式

基本解とロンスキアン, オイラーの公式, 特性方程式, 単振動, 減衰振動

§ 9.4 2 階非同次線形微分方程式

強制振動, 特殊解の求め方, 力学・電気回路等への応用

§ 9.5 級数を用いた解法*

1 階・2 階微分方程式へ適用例 (エアリー, エルミート, ルジャンドル, オイラー, ベッセルの微分方程式)

Chapter 10 平面曲線と極座標 (Curves in the plane and polar coordinates)

§ 10.1 媒介変数表示された平面曲線

媒介変数表示の導関数, 2 次元ベクトル値関数の微分, 2 次元運動の速度・加速度, 2 次元運動方程式の解 (放物運動, 円運動等)

§ 10.2 平面曲線の長さ・面積, 回転体の体積・表面積

媒介変数表示された平面曲線の長さ, 面積, 回転体の体積, 表面積

§ 10.3 極座標系

極座標, 極方程式, 極座標系における平面曲線, 曲線の長さ, 面積

§ 10.4 2 次曲線

2 次曲線 (楕円, 双曲線, 放物線), 極表示, 座標系の回転

Calculus III (3rd semester)

Chapter 11 空間曲線と曲面 (Curves and surfaces in the space)

§ 11.1 空間ベクトルの演算

3 次元ベクトルの内積, 外積, 3 重積と行列式, 力のモーメント

§ 11.2 空間の直線と平面

3 次元空間内の直線と平面の方程式, 点と直線・平面の距離, 2 つの直線・平面の間の距離, 3 平面の交点 (クラメル公式)

§ 11.3 3 次元ベクトル値関数

3 次元ベクトル値関数の微分・積分, 速度・加速度ベクトル, 3 次元運動への応用

§ 11.4 空間曲線と運動

空間曲線の長さ，接線，法線，曲率，捩率

§ 11.5 運動量と角運動量

運動量，運動量・力積の定理，運動量保存則，中心力場と角運動量保存則，ケプラー運動

Chapter 12 偏微分 (Partial derivatives)

§ 12.1 多変数関数の極限と連続

多変数関数の定義と例，多変数関数のグラフ・極限と連続

§ 12.2 偏微分

偏微分係数，偏導関数，偏微分可能性と連続性，高次偏導関数，偏微分の順序交換 (Young の定理，Schwarz の定理)，調和関数，熱力学への応用

§ 12.3 微分可能性と合成関数の偏微分

微分可能性，多変数合成関数の偏微分 (Chain rule) とその応用

§ 12.4 接平面とテイラー展開

接平面，方向微分，勾配ベクトル，多変数関数の平均値の定理，テイラーの定理

§ 12.5 多変数関数の極値

2変数関数の極値，条件付き極値，ラグランジュの乗数法

§ 12.6 陰関数の微分法と極値*

2変数および3変数関数の陰関数定理，陰関数の極値

Chapter 13 重積分 (Multiple integration)

§ 13.1 2重積分

2重積分の定義，矩形上の累次積分，一般領域上の累次積分，積分順序の変更

§ 13.2 重積分の変数変換

変数変換 (置換積分)，極座標系での2重積分，一般の座標変換，広義積分

§ 13.3 重積分の応用

面積・体積・曲面積への応用，モーメントと重心，慣性モーメント

§ 13.4 3重積分とその応用

3重積分の定義と累次積分，変数変換 (円柱座標系・球面座標系)，重心・モーメント，慣性モーメントへの応用

Chapter 14 ベクトル解析 (Vector analysis)

§ 14.1 ベクトル場

ベクトル場，ポテンシャルと保存場，ベクトル場の発散 (div) と回転 (rot)，電磁

気学・流体力学への応用

§ 14.2 線積分と保存場

スカラー場・ベクトル場の線積分，経路積分と保存場の関係，運動エネルギー・仕事の定理，力学的エネルギー保存則

§ 14.3 グリーンの定理

グリーンの定理，完全形微分方程式，2次元のガウスの定理およびアンペアの定理

§ 14.4 面積分

曲面のパラメーター表示，スカラー場の面積分，ベクトル場の面積分（流束積分）

§ 14.5 発散定理とストークスの定理

ガウスの発散定理，ストークスの定理，それらの電磁気学や流体力学への応用

応用プロジェクト実例集

物理・化学系から工学系の諸分野の専門課程の学習につながる研究課題の実例集
(Calculus I, II, III の最後に配置される)

付章 (Appendixes)

A 代数的準備

A1 実数の公理，順序，絶対値の性質

A2 複素数の四則演算，絶対値，極表示

B 指数関数・対数関数の復習

B1 指数法則等諸公式の導出，指数関数

B2 対数法則等諸公式の導出，対数関数

C 三角関数の復習

C1 弧度法，三角関数の諸公式の導出

C2 加法定理，倍角・半角の公式，積和・和積の公式，三角関数の合成

D 実数と連続関数の性質

実数の連続性公理（上限の公理，有界単調列の収束性、縮小区間列の原理，Bolzano-Weierstrass の定理，Cauchy の収束定理，Archimedes の原理），中間値の定理，最大・最小値の定理，一様連続性定理，etc.

E 本文中で省略された定理の証明

極限定理（積，商，合成関数），逆関数の連続性に関する定理，ロピタルの定理等

F ベクトル空間について

G 微分・積分の公式集

H 物理量の単位と次元

